APLICACIONES DE LA DERIVADA

ANA COLO HERRERA HECTOR PATRITTI

PARA LOS CURSOS DE MATEMATICA DE LOS BACHILLERATOS TECNOLÓGICOS DEL C.E.T.P.

APLICACIONES DE LA

DERIVADA

Ejercicios resueltos

PROF. ANA COLO HERRERA **PROF. HECTOR PATRITTI**

Publicación inscrita en la Biblioteca Nacional el 5 de enero del 2004 en el Libro No.29 con el No.232 habiéndose realizado los aportes legales correspondientes según Art.7 de la ley No. 9739 sobre derechos de autor.

Email: anacolo@adinet.com.uy hpatritti@yahoo.com.ar
Telefax: 7120680 Montevideo -Uruguay

CONTENIDO

PROLOGO

AL ESTUDIANTE

La presente publicación tiene por objetivo poner a tu disposición una amplia serie de ejercicios , con sus correspondientes resoluciones , relativos a la aplicación del concepto de Derivada a problemas de las distintas disciplinas que involucran los Bachilleratos Tecnológicos en sus diferentes orientaciones.

Partimos de la base de que estás familiarizado con los conceptos teóricos correspondientes a Funciones de Variable Real que tu docente del curso ha desarrollado respecto al concepto de Derivada.

Al comienzo de la publicación encontrarás un resumen de los conocimientos que deberás tener presentes para resolver los problemas propuestos así como una tabla de derivadas.

Al final de la publicación te sugerimos aquellos ejercicios que entendemos adecuados según el Bachillerato que estás cursando, sin que ello signifique naturalmente , que los restantes carezcan de interés para tí.

Esperamos que si aún no lo estás , llegues a convencerte de la importancia relevante que el concepto de Derivada tiene en la resolución de problemas relativos a la tecnología en sus distintas disciplinas.

La publicación está dividida en dos Capítulos.

El Capítulo1 se refiere a la derivada como índice matemático que expresa la <u>tasa de variación instantánea o rapidez de variación instantánea</u> de una función y consta de veinticuatro ejercicios.

El Capítulo 2 está dedicado a problemas de <u>Optimización</u> y consta de sesenta ejercicios.

Los enunciados de algunos de estos ejercicios corresponden a conocidos problemas que seguramente encontrarás en distintos textos de Matemática pero que han sido modificados y/o adaptados por los autores a los cursos de los Bachilleratos Tecnológicos.

Otros son creación de los autores.

El enunciado del ejercicio No. 54 corresponde al ejercicio No.18 , página 317 del libro “Cálculo” de James Stewart que ha sido incluído por considerar que se trata de una interesante muestra de aplicación de los conceptos que estamos manejando en una disciplina aparentemente alejada de la que tú has elegido

Las <u>resoluciones</u> de todos los ejercicios propuestos en la publicación son de exclusiva responsabilidad de los autores.

Deseamos hacerte una precisión respecto de la notación utilizada en la resolución de los ejercicios.

De las distintas notaciones que suelen utilizarse para la "**función derivada primera**" de una función **f** de variable real **x** , a saber f' , f_x , $\frac{df}{dx}$, hemos adoptado la notación de Leibniz $\frac{df}{dx}$ que entendemos la más adecuada pues explicita claramente la variable respecto de la cual se efectúa la derivación , hecho este que en los problemas técnicos es absolutamente relevante.

$\frac{df}{dx}$ será entonces la notación para la función derivada primera. de la función **f** respecto de la variable **x** .

$\frac{df}{dx}(x_o)$ será el valor de la función derivada primera en el punto x_o.

$\frac{d^2f}{dx^2}$ será la notación para la "función derivada segunda" de la función **f** respecto de la variable **x** .

$\frac{d^2f}{dx^2}(x_o)$ será el valor de la función derivada segunda en el punto x_o.

Previo al Capítulo 1 encontrarás un resumen de fórmulas de perímetros , áreas y volúmenes , un resumen de fórmulas trigonométricas , y una tabla de derivadas.

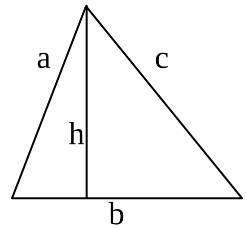
También una selección de definiciones y teoremas que has visto en el curso teórico y que deberás tener presentes para resolver los ejercicios del Capítulo 1.

Si este material que ponemos a tu disposición resulta de utilidad en tu formación matemática habremos alcanzado nuestro objetivo.

LOS AUTORES

Perímetros , Areas y Volúmenes

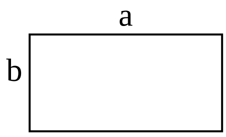
Triángulo



$$p = a + b + c$$

$$A = \frac{b.h}{2}$$

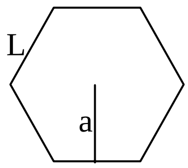
Rectángulo



$$p = 2a + 2b$$

$$A = a.b$$

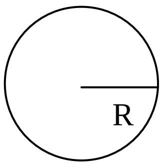
Hexágono



$$p = 6L$$

$$A = \frac{p.a}{2}$$

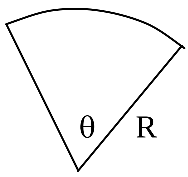
Círculo



Long. Cfa.= $2\pi R$

$$A = \pi R^2$$

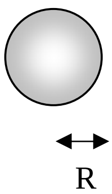
Sector circular



Long. Arco = $R\theta$

$$A = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

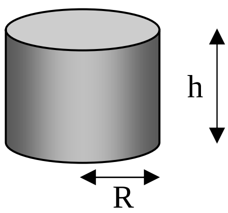
Esfera



$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

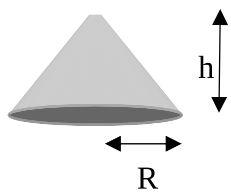
Cilindro



$$A_{total} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$$

$$V = \pi R^2 h$$

Cono



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

TRIGONOMETRIA

Unidades de medida de ángulos

$$\begin{cases} \text{Grados} \\ \text{Radianes} \end{cases}$$

Equivalencia: $360^0 = 2\pi$ rad. $\Longrightarrow$ $1 \text{ rad} = \dfrac{180^0}{\pi} \cong 57^0\, 17^m$

Longitud de un arco de circunferencia de radio R que subtiende un ángulo central θ

$$s = R\theta \qquad \theta \text{ en radianes}$$

Valores de líneas trigonométricas de algunos ángulos especiales.

θ Grados	0	30	45	60	90	120	180	270	360
θ Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	- 1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	- 1	0	1
tg θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	0	$\nexists$	0

Angulos suplementarios

$\theta + \varphi = \pi$

$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,(\pi-\theta) \qquad \cos\theta = -\cos(\pi-\theta) \qquad \text{tg}\,\theta = -\,\text{tg}\,(\pi-\theta)$

Angulos complementarios

$\theta + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \text{tg}\,\theta = \text{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

Angulos opuestos

$\text{Sen}\,(-\theta) = -\,\text{sen}\,\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \text{tg}\,(-\theta) = -\,\text{tg}\,\theta$

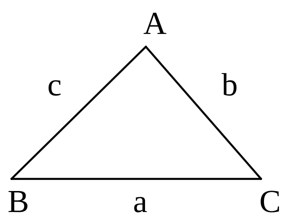
Angulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$ y en π

$$\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta \qquad \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\theta \qquad \operatorname{tg}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{cotg}\theta$$

$$\operatorname{sen}(\theta+\pi)=-\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta+\pi)=-\cos\theta \qquad \operatorname{tg}(\theta+\pi)=\operatorname{tg}\theta$$

Teorema del seno

$$\frac{\operatorname{sen}A}{a}=\frac{\operatorname{sen}B}{b}=\frac{\operatorname{sen}C}{c}$$



Teorema del coseno

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2\,a\,c\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2\,a\,b\cos C$$

Fórmula fundamental

$$\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1$$

Fórmulas de suma y resta de ángulos

$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y$

$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

$\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$

$\operatorname{tg}(x-y)=\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$

Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x \qquad \cos 2x=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x \qquad \operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$$

Fórmulas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}^2x=\frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

TABLA DE DERIVADAS

f(x)	$\frac{df}{dx}$	f(x)	$\frac{df}{dx}$
k	0	senx	cosx
x	1	cosx	- sen x
|x|	sg(x) $x \neq 0$	tgx	$1 + tg^2x$
x^m	mx^{m-1}	Arcsenx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	Arccosx	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	Arctgx	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	shx	chx
e^x	e^x	chx	shx
Lx	$\frac{1}{x}$	thx	$1 - th^2x$
L|x|	$\frac{1}{x}$	Argshx	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
Sg(x)	0 $\forall x \neq 0$	Argchx	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	a^x La	Argthx	$\frac{1}{1-x^2}$

DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS

$(f\circ g)(x)$	$\frac{d(f\circ g)}{dx}$	$(f\circ g)(x)$	$\frac{d(f\circ g)}{dx}$
$g(x)$	$\frac{dg}{dx}$	sen $g(x)$	$\cos g.\ \frac{dg}{dx}$
$k.g$	$k\frac{dg}{dx}$	cos $g(x)$	$-\ \text{sen}\ g.\ \frac{dg}{dx}$
$\lvert g\rvert$	$\text{sg}(g).\ \frac{dg}{dx}$	tg $g(x)$	$(\ 1+\text{tg}^2 g\ ).\frac{dg}{dx}$
g^m	$mg^{m-1}\ \frac{dg}{dx}$	Arcsen $g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \frac{dg}{dx}$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{1}{g^2}\ \frac{dg}{dx}$	Arccos $g(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \frac{dg}{dx}$
$\sqrt{g}$	$\frac{1}{2\sqrt{g}}\ \frac{dg}{dx}$	Arctg $g(x)$	$\frac{1}{1+g^2}\ \frac{dg}{dx}$
$\sqrt[3]{g}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{g^2}}\ \frac{dg}{dx}$	sh $g(x)$	$\text{ch}\ g(x).\ \frac{dg}{dx}$
$e^{\,g}$	$e^{\,g}\ \frac{dg}{dx}$	ch $g(x)$	$\text{sh}\ g(x).\ \frac{dg}{dx}$
Lg o $L\lvert g\rvert$	$\frac{1}{g}\ \frac{dg}{dx}$	th $g(x)$	$(1-\text{th}^2 g)\frac{dg}{dx}$
$L\left\lvert\frac{g}{h}\right\rvert$	$\frac{1}{g}\frac{dg}{dx}-\frac{1}{h}\frac{dh}{dx}$	Argsh $g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\ \frac{dg}{dx}$
$a^{\,g}$	$a^{\,g}.La.\ \frac{dg}{dx}$	Argch $g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{g^2-1}}\ \frac{dg}{dx}$
$g^{\,h}$	$g^{\,h}\left[\frac{dh}{dx}Lg+\frac{h}{g}\frac{dg}{dx}\right]$	Argth $g(x)$	$\frac{1}{1-g^2}\ \frac{dg}{dx}$
$h\ e^{\,g}$		$e^{\,g}\left[\frac{dh}{dx}+h.\frac{dg}{dx}\right]$	

SELECCIÓN DE DEFINICIONES Y TEOREMAS

Definición de función derivable en un punto.

Una función **f** de variable real **x** con dominio D se dice **derivable en un punto x_o** perteneciente a D si y sólo si existe y es finito , el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \qquad h \in R$$

Al valor de dicho límite se le llama " **derivada de la función f en el punto x_o**".

Teorema 1) Derivada de suma de funciones

H) Si f y g son funciones derivables en x_o

T) $\dfrac{d(f+g)}{dx}(x_o) = \dfrac{df}{dx}(x_o) + \dfrac{dg}{dx}(x_o)$

Teorema 2) Derivada del producto de funciones

H) Si f y g son funciones derivables en x_o

T) $\dfrac{d(f.g)}{dx}(x_o) = g(xo)\dfrac{df}{dx}(x_o) + f(x_o)\dfrac{dg}{dx}(x_o)$

Teorema 3) Derivada del cociente de funciones

H) Si f y g son funciones derivables en x_o con $g(x_o) \neq 0$

T) $\dfrac{d\left(\dfrac{f}{g}\right)}{dx}(x_o) = \dfrac{g(x_o).\dfrac{df}{dx}(x_o) - f(x_o).\dfrac{dg}{dx}(x_o)}{g^2(x_o)}$

Teorema 4) Derivada de la función compuesta o regla de la cadena

H) Si **g** es derivable en x_o y **f** derivable en g (x_o)

T) $\dfrac{d(f \circ g)}{dx}(x_o) = \dfrac{df}{dg}[g(x_o)].\dfrac{dg}{dx}(x_o)$

Definiciones

Función creciente en un punto

Una función **f** es creciente en un punto $\mathbf{x_o}$ si cumple:

$f(x) \leq f(x_o) \quad \forall x \in E^-_{x_{0,\delta}}$ (semientorno izquierdo de centro x_o y radio δ)

$f(x) \geq f(x_o) \quad \forall x \in E^+_{x_{0,\delta}}$ (semientorno derecho de centro x_o y radio δ)

Función decreciente en un punto

Una función **f** es decreciente en el punto $\mathbf{x_o}$ si cumple:

$f(x) \geq f(x_o) \quad \forall x \in E^-_{x_{0,\delta}}$

$f(x) \leq f(x_o) \quad \forall x \in E^+_{x_{0,\delta}}$

Máximo y mínimo relativos

$f(x_o)$ es máximo relativo en x_o de la función **f** si se cumple:

$f(x_o) \geq f(x) \quad \forall x \in E_{x_{0,\delta}}$

$f(x_o)$ es mínimo relativo en x_o de la función **f** si se cumple:

$f(x_o) \leq f(x) \quad \forall x \in E_{x_{0,\delta}}$

Teorema 5) Relación entre derivabilidad y continuidad

H) Si una función **f** es derivable en el punto $\mathbf{x_o}$

T) **f** es contínua en el punto $\mathbf{x_o}$

Sobre este teorema recuerda que el recíproco **no** es válido, es decir, existen funciones contínuas en un punto pero no derivables en él.

Teoremas que relacionan la derivada en un punto con la variación de la función en él.

Teorema 6)

H) $\frac{df}{dx}(x_0) > 0$

T) **f** creciente en el punto $\mathbf{x_o}$

Teorema 7) **H)** $\frac{df}{dx}(x_0) < 0$

T) **f** decreciente en el punto $\mathbf{x_0}$

Teorema 8) **H)** **f** presenta máximo o mínimo relativo en $\mathbf{x_0}$

$\exists \frac{df}{dx}(x_0)$

T) $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$

Respecto de este teorema debes tener presente que:

1ro) El recíproco no es cierto. Puedes tener una función con derivada nula en un punto x_0 y la función no presentar en él un extremo relativo. La fig. (1) te muestra esa posibilidad.

2do.) Una función puede presentar extremo relativo en un punto x_o y no ser derivable en él. La fig. (2) te ilustra uno de estos casos para una función contínua en x_0 y la figura (3) para una función discontínua en x_0 .

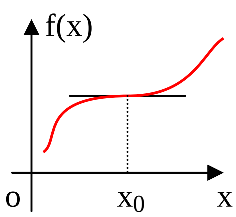


fig. (1)

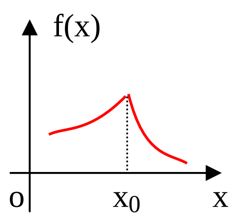


fig. (2)

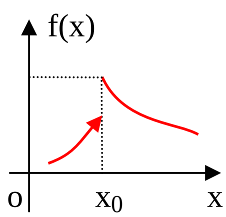


fig. (3)

<u>Teoremas que relacionan la derivada segunda de una función con su concavidad</u>.

Teorema 9) **H)** $\frac{d^2f}{dx^2}(x_o) > 0$ **T)** **f** presenta concavidad positiva en $\mathbf{x_0}$

Teorema 10) **H)** $\frac{d^2f}{dx^2}(x_o) < 0$ **T)** **f** presenta concavidad negativa en $\mathbf{x_0}$

Teoremas relativos a intervalos (a , b).

Teoremas que relacionan la derivada 1ra. con la variación de la función.

Teorema 11) **H)** $\frac{df}{dx} > 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ **T)** f creciente en (a,b)

Teorema 12) **H)** $\frac{df}{dx} < 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ **T)** f decreciente en (a,b)

Teorema 13) **H)** $\frac{d^2f}{dx^2} > 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ **T)** f tiene concavidad > 0 en (a,b)

Teorema 14) **H)** $\frac{d^2f}{dx^2} < 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ **T)** f tiene concavidad < 0 en (a,b)