Se llama *valor absoluto* de un número real a, al mismo número si es positivo o cero y a su opuesto si es negativo, es decir,

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0,$$
$$|a| = -a \text{ si } a < 0.$$

Así $|\pi| = \pi$ y $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

2.2.3 Ejemplo

Demostrar que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $|a+b| = |a| + |b|$, y que si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $|a+b| < |a| + |b|$.

Solución

Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$, y así
$|a+b| = a+b$, $|a| = a$ y $|b| = b$, luego $|a+b| = |a| + |b|$.

Supongamos que $a > 0$ y $b < 0$. Si $a > |b|$, se tiene que $a + b > 0$, así $|a+b| = a+b$, como $|a| = a$, $|b| = -b$ y $a + b < a - b$ puesto que b es negativo, se tiene

$$|a+b| = a+b < a-b = |a| + |b|.$$

Si $a < |b|$ se tiene que $a + b < 0$, así $|a+b| = -(a+b)$, como $|a| = a$, $|b| = -b$ y $-a-b < a-b$ puesto que a es positivo, se tiene

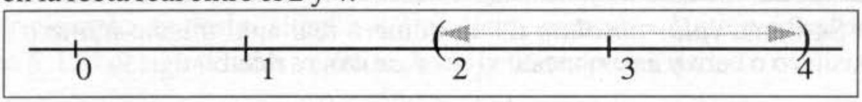
$$|a+b| = -(a+b) = -a-b < a-b = |a| + |b|.$$

• Las relaciones $<$ y $\leq$ permiten definir algunos subconjuntos de los números reales que tienen una interpretación sencilla en la recta real y que se utilizarán posteriormente a lo largo del libro.

Se llama *intervalo abierto* (a, b) al conjunto de los números reales x que verifican las desigualdades

$$a < x < b.$$

Así el intervalo $(2, 4)$ es el conjunto de los números reales que están en la recta real entre el 2 y 4.



Se denomina *intervalo semiabierto* [a, b) al conjunto de los números reales x, $a \leq x < b$, y (a, b] al conjunto de los números reales $a < x \leq b$.

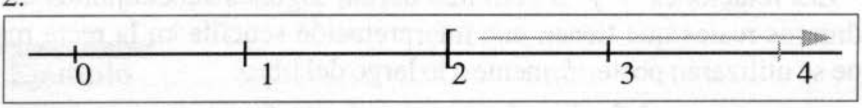
Se denomina *intervalo cerrado* [a, b] al conjunto de los números reales x, tales que $0 \leq x \leq b$.

Así, el intervalo [2, 4) es el conjunto de los números reales que están en la recta real entre el 2 y el 4, incluyendo el número 2, y el intervalo (2, 4] es el conjunto de los números reales que están en la recta real entre el 2 y el 4, incluyendo el número 4.

El intervalo [1, 3], es el conjunto de los números reales que están en la recta real entre el 1 y el 3, incluyendo al 1 y al 3.

Se denomina *semirecta abierta* (a, →) ó (←, a) al conjunto de los números reales x, $a < x$ respectivamente $x < a$, y *semirecta cerrada* [a, →) respectivamente (←, a] al conjunto de los números reales x, $a \leq x$ respectivamente $x \leq a$.

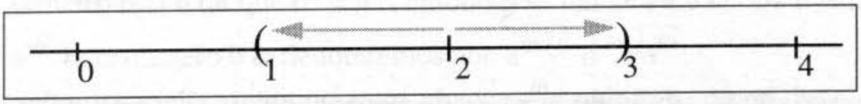
Así [2, →) es el conjunto de los números mayores o iguales que 2, y es la semirecta señalada en la figura con la flecha incluyendo al número 2.



Se llama entorno abierto de un número real a y radio $r > 0$, al conjunto de números reales x tales que $a - r < x < a + r$, o al intervalo $(a - r, a + r)$.

Se llama entorno cerrado un número real a y radio $r > 0$, al conjunto de números reales x tales que $a - r \leq x \leq a + r$, o al intervalo $[a - r, a + r]$.

Así por ejemplo el entorno del punto 2 y radio 1, es el intervalo $(2-1, 2+1) = (1, 3)$ como se indica en la figura siguiente.



2.3 Potencias de números reales

Sea a un número real, y sea n un número natural. Entonces se denomina *potencia del número a con exponente n*, al número

$$a^n = a \overset{n}{\dots} a.$$

Esto es, a^n es el producto de n factores, cada uno de los cuales es igual al número a. Al número a se le llama *base* y al número n *exponente*, y diremos que a^n es la potencia de base a y exponente n.

Así por ejemplo $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$,

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^4 = \frac{-3}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{81}{16}.$$

- La definición anterior tiene sentido si el número de factores es 1 o más.

Sea $a \neq 0$, un número real, y sea n un número natural. Entonces se define

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Si $n = 0$, se define $a^0 = 1$.

Así por ejemplo $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\frac{1}{5^3}} = 5^3 = 125,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$

- Así, hemos definido a^m, cuando m es un entero. Para extender esta definición a exponente racional no entero se necesita definir la raíz n-ésima de un número real, donde n es un entero positivo.

Sea a un número real y n un número natural, tal que existe un número real b tal que $b^n = a$, entonces se llamará a b la raíz n-ésima de a. Este número b lo denotaremos por $a^{1/n}$ ó $\sqrt[n]{a}$.

Si n= 2, entonces $a^{1/2}$ se llamará la raíz cuadrada de a y escribimos $\sqrt{a}$. Si n = 3, entonces $a^{1/3}$, se llamará la raíz cúbica de a y escribimos $\sqrt[3]{a}$

Así por ejemplo $\sqrt[3]{-27} = -3$, puesto que $(-3)^3 = -27$. $\sqrt[4]{16} = 2$ ó -2, puesto que $(2)^4 = (-2)^4 = 16$, $\sqrt{81} = 9$ ó -9, puesto que $(9)^2 = (-9)^2 = 81$.

- Dado un número real a y un número natural n, no siempre existe un número real b tal que $b^n = a$. Por ejemplo si a es negativo y n es par nunca existe un número real b verificando $b^n = a$.

Como se observa en los ejemplos anteriores, un número real positivo puede tener dos raíces, de hecho cada número real positivo tiene dos raíces cuadradas. Por notación cuando escribamos $\sqrt{a}$, denotaremos la raíz cuadrada positiva de a y por $-\sqrt{a}$, denotaremos la raíz cuadrada negativa de a, cuando se quiera denotar ambas, pondremos $\pm\sqrt{a}$.

Sea a un número real y m / n un número racional, tal que existe un número real b tal que $b^n = a^m$, entonces se llamará a b la raíz n-ésima de a^m. Este número b lo denotaremos por $a^{m/n}$ ó $\sqrt[n]{a^m}$.

Así por ejemplo $(-2)^{4/5} = \sqrt[5]{(-2)^4} = \sqrt[5]{16}$, $(\frac{8}{27})^{-1/3} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$.

- Dados tres números reales a^m, a^n y b^n distintos de cero. Se tiene que verifican las siguientes propiedades:

Propiedades	Ejemplos
$a^m . a^n = a^{m+n}$	$2^{1/3} . 2^{3/5} = 2^{14/15}$
$a^m / a^n = a^{m-n}$	$3^{1/2} / 3^{3/4} = 3^{-1/4}$
$(a^m)^n = a^{m.n}$	$(5^{3/2})^{2/5} = 5^{6/10}$
$a^n . b^n = (a. b)^n$	$(-2)^3.(1/2)^3 = (-1)^3 = -1$
$a^n / b^n = (a / b)^n$	$7^4 / 3^4 = (7/3)^4$

2.3.1 Ejemplo

Simplificar $\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{96} - 5\sqrt{98}$.

Solución

Como $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, entonces

$$\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{96} - 5\sqrt{98} =$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2^5\cdot 3}-5\sqrt{7^2\cdot 2}=3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}-5\cdot 7\cdot\sqrt{2}\quad=$$
$$=\sqrt{2}\cdot(12-35)=-23\cdot\sqrt{2}.$$

2.3.2 Ejemplo

Simplificar

$$\left(\frac{4\cdot y}{\sqrt{y}}\right)^3.$$

Solución

$$\left(\frac{4\cdot y}{\sqrt{y}}\right)^3=\frac{4^3\cdot y^3}{\sqrt{y^3}}=$$
$$\frac{64\cdot y^3}{y\cdot\sqrt{y}}=\frac{64\cdot y^3\cdot\sqrt{y}}{y\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}=\frac{64\cdot y^3\cdot\sqrt{y}}{y\cdot\sqrt{y^2}}=64\cdot y\cdot\sqrt{y}$$

2.3.3 Ejemplo

Simplificar $\sqrt{\dfrac{x^6\cdot y^4}{z^8}}$.

Solución

$$\sqrt{\frac{x^6\cdot y^4}{z^8}}=\frac{\sqrt{x^6}\cdot\sqrt{y^4}}{\sqrt{z^8}}=\frac{x^3\cdot y^2}{z^4}.$$

2.3.4 Ejemplo

Simplificar $\sqrt{\dfrac{(a+1)^{3/2}\cdot a^{7/3}}{(a+1)^{7/2}\cdot a^{1/3}}}$.

Solución

Como $\dfrac{(a+1)^{3/2}\cdot a^{7/3}}{(a+1)^{7/2}\cdot a^{1/3}} = (a+1)^{\frac{3}{2}-\frac{7}{2}}\cdot a^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}} = (a+1)^{-2}\cdot a^2,$

entonces

$$\sqrt{\frac{(a+1)^{3/2}\cdot a^{7/3}}{(a+1)^{7/2}\cdot a^{1/3}}} = (a+1)^{-1}.\,a = \frac{a}{a+1}.$$

2.4 Ecuaciones e inecuaciones en una variable

A veces en Matemáticas hay expresiones en las que aparece una cantidad desconocida que normalmente se designa con la letra x. Como por ejemplo en las expresiones:

1) $ax+b=c$.

2) $ax+b>c$ ó $ax+b\geq c$.

3) $ax+b<c$ ó $ax+b\leq c$.

Donde a, b y c son números reales.

A las expresiones de la forma 1) se les suele llamar *ecuaciones lineales en una variable* y a las expresiones de la forma 2) y 3) se les suele llamar *inecuaciones lineales en una variable*.

El resolver una ecuación o una inecuación consiste en encontrar los números reales que verifican la igualdad o las desigualdades que se consideran. En el tema 7 tendremos la oportunidad de estudiar más a fondo las ecuaciones lineales.

2.4.1 Ejemplo

Resolver las ecuaciones lineales

(a) $2x + 4 = 8$.

(b) $3x + 7 = 5x - 4$.

Solución

(a) Utilizando las operaciones con números reales se tiene que si $2x + 4 = 8$, entonces $2x = 8 - 4 = 4$, así $x = 4 / 2 = 2$.

(b) Operando se tiene $3x + 7 - 5x = -4$, luego $-2x + 7 = -4$, por lo tanto $-2x = -11$, así $x = 11 / 2$.

2.4.2 Ejemplo

Resolver la inecuaciones lineales

(a) $\dfrac{2x+3}{2} < \dfrac{5x-4}{3}$.

(b) $3x - 7 \geq 2x + 9$.

Solución

(a) Si se multiplica por el m.c.m.(2, 3) = 6 ambos términos de la desigualdad, la desigualdad no cambia de sentido, ya que 6 es un número real positivo, y se consigue que desaparezcan los denominadores.

$3.(2x + 3) < 2.(5x - 4)$, así $6x + 9 < 10x - 8$. Si restamos a ambos miembros $6x$ la desigualdad sigue sin cambiar de sentido, por lo que se tiene $9 < 4x - 8$. Si ahora se suma 8 a ambos miembros se tiene $17 < 4x$, finalmente si dividimos por 4, se tiene, $17 / 4 < x$. Luego la solución es el conjunto de números reales mayores que $17 / 4$, o sea la semirecta abierta $(17 / 4, \rightarrow)$.

(b) Si se resta a ambos miembros $2x$ la desigualdad sigue sin cambiar de sentido, por lo que se tiene $x - 7 \geq 9$, si se suma 7 a ambos miembros se tiene $x \geq 16$. Luego la solución es el conjunto de números reales mayores o iguales que 16, o sea la semirecta cerrada $[16, \rightarrow)$.

- Se pueden estudiar otro tipo de inecuaciones que están asociadas con el valor absoluto. Así si $a > 0$,