Cálculo de primitivas.

Isabel María Elena Fernández y Celia Rodríguez Alfama*

18 de septiembre de 2005

Resumen

Vamos a intentar mostrar una introducción al cálculo integral, que es el tema que nos ha quedado pendiente de estudio a lo largo de este curso.

1. Introducción.

Lo primero que debemos tener claro es qué es una integral, como primera aproximación diremos que la integral o primitiva de una función $f(x)$ es otra función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Esto suele escribirse como:

$$\int f(x) = F(x) \text{ siendo } F(x) \text{ tal que } F'(x) = f(x).$$

A la función $f(x)$ se le llama integrando y $F(x)$ es, como ya se ha comentado, *una* primitiva de $f(x)$. Hemos usado el artículo indeterminado pues si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ también lo es $F(x) + C$ siendo $C \in \mathbb{R}$.

2. Propiedades lineales de la integral.

Sean f y g dos funciones y sean α y β dos números reales. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

2. $$\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$$

*Puerto Real (Cádiz).

Estas dos propiedades se pueden englobar en una:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

Ejemplo:

$$\int (2x - 3x^2)\, dx = 2 \int x\, dx - 3 \int x^2\, dx$$

3. Integrales inmediatas.

Básicamente, el proceso de integración lo podemos interpretar como el proceso inverso a la derivación. De esta forma podemos elaborar una tabla de integrales que se resolverían de forma muy sencilla simplemente dominando la técnica de la derivación.

Se nos presentan los siguientes casos:

1. *Integral de la función nula.*

   Si tenenmos $f(x) = C$ donde $C \in \mathbb{R}$ entonces $f'(x) = 0$. Por lo tanto

   $$\int 0\, dx = C, \quad donde \quad C \in \mathbb{R}$$

2. *Integral de una función constante.*

   Si buscamos una función que al derivarla nos de una constante $k \in \mathbb{R}$, observamos que la solución buscada es kx, así pues:

   $$\int k\, dx = kx + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

3. *Tipo potencial.*

   Haciendo uso de:

   $$f(x) = x^{n+1} \Longrightarrow f'(x) = (n+1)x^n$$

   obtenemos que:

   $$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

   Análogamente, haciendo uso de la regla de la cadena para el caso:

   $$g(x) = (h(x))^{n+1} \Longrightarrow g'(x) = (n+1)(h(x))^n\, h'(x)$$

obtenemos que:

$$\int f^n(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Ejemplos:

$$\int x^{-1/3}dx; \qquad \int (2x+1)(x^2+x+1)^{200}dx$$

4. *Tipo logarímico.*

   Como sabemos, la derivada de la función logaritmo es $1/x$. De aquí se deduce que:

   $$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$$

   Y como antes, usando la regla de la cadena, obtenemos su expresión para la forma compuesta:

   $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + C$$

   Ejemplos:

   $$\int tg(x)\,dx; \qquad \int \frac{sen(2x)}{1+sen^2x}dx$$

5. *Tipo exponencial.*

   a) Puesto que la derivada de e^x es ella misma, tenemos que:

   $$\int e^x\,dx = e^x + C$$

   Análogamente, para la derivada de la función exponencial compuesta tenemos que:

   $$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

   b) Para el caso en que $f(x) = a^x$, tenemos que $f'(x) = \ln a\, a^x$ por lo que llegamos a que:

   $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

   Algo similar se obtiene para el caso compuesto:

   $$\int a^{f(x)}f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

Ejemplos:

$$\int xe^{x^2}\,dx; \qquad \int e^{sen(x)} cos(x)\,dx$$

6. *Tipo coseno y tipo seno.*

   Haciendo uso de la derivada, tanto del seno como del coseno, razonando como en los casos anteriores se tiene sin ningún tipo de dificultad que:

$$\int sen(x)\,dx = -cos(x) + C$$

$$\int cos(x)\,dx = sen(x) + C$$

   Y para la forma compuesta:

$$\int sen(f(x))f'(x)\,dx = -cos(f(x)) + C$$

$$\int cos(f(x))f'(x)\,dx = sen(f(x)) + C$$

   Ejemplos:

$$\int cos(nx)\,dx; \qquad \int \frac{cos(\ln x)}{x} dx$$

7. *Tipo tangente.*

   Como todos sabemos:

$$f(x) = tg(x) \implies f'(x) = sec^2 x = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

   Por lo tanto:

$$\int sec^2(x)\,dx = tg(x) + C$$

   Y puesto que por aplicación directa de la regla de la cadena obtenemos que:

$$h(x) = tg(f(x)) \implies h'(x) = sec^2(f(x))f'(x)$$

   es inmediata que la deducción del tipo tangente compuesto:

$$\int sec^2(f(x))f'(x)\,dx = tg(f(x)) + C$$

   Ejemplos:

$$\int tg^2(x)\,dx; \qquad \int sec^4 x\,dx$$

8. *Tipo cotangente.*

   Razonando análogamente a como lo hicimos en el caso anterior, usando la derivada de la cotangente, llegamos a:

$$\int cosec^2(x)\,dx = \int \frac{1}{sen^2 x}dx = -cotg(x) + C$$

   Y para el caso compuesto:

$$\int cosec^2(f(x))f'(x)\,dx = -cotg(f(x)) + C$$

   Ejemplos:

$$\int cosec^2(2e^x)e^x\,dx; \qquad \int cosec^4 x\,dx$$

9. *Tipo arcoseno (=-arcocoseno).* Basándonos en la expresión de la derivada de la función arcoseno tenemos que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen(x) + C$$

   Y para la forma compuesta:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx = arcsen(f(x)) + C$$

   Ejemplos:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-4e^{2x}}}dx; \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-ln^2 x}}dx$$

10. *Tipo arcotangente (=-arcocotangente).*

    La forma simple y la compuesta se deduce, al igual que todos los casos anteriores de la expresión de la derivada de esta función. Por lo tanto tenemos que:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + C$$

    Y la forma compuesta será:

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctg(f(x)) + C$$

Nota:

Un caso muy frecuente es encontrarnos con la integral:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$$

que es un caso particular del tipo arcotangente, pero que no es mala idea recordarla pues es muy frecuente toparse con ella en muchos problemas. Su resolución es casi inmediata:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1/a^2}{1+(x/a)^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1/a}{1+(x/a)^2}dx = \frac{1}{a}arctg(\frac{x}{a})$$

Y de la misma manera se concluye que:

$$\int \frac{f'(x)}{a^2+f^2(x)}dx = \frac{1}{a}arctg(\frac{f(x)}{a})$$

Ejemplos:

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx; \qquad \int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

4. Método de integración por partes.

El método de integración por partes se basa en la regla de derivación de un producto de funciones. A partir de esta regla trataremos de buscar un método eficaz para resolver integrales de productos de funciones.

Sea u y v dos funciones derivables. La derivada del producto uv viene dada por la fórmula:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

si integramos en ambos miembros se obtiene:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

y despejando $\int u\,dv$ se obtiene:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Para no olvidar esta fórmula es muy conocida la siguiente regla mnemotécnica: "Un día vi una vaca vestida de uniforme."

A la hora de aplicar la fórmula tenemos que elegir quién será u y quién será dv. Para ello se suele escoger como u aquella función fácil de derivar y como dv la expresión fácil de integrar.

Ante la duda de elección, elegir una acertadamente requiere algo de práctica que se adquiere con los ejercicios. De todos modos, si al hacer una elección llegamos a una integral más difícil que la de partida se recomienda tomar otro camino.

A veces conviene aplicar dos veces la integración por partes. Puede darse el caso que obtengamos una integral similar a la de partida, para lo cual bastará despejar la integral y estará resuelto el problema.

Ejemplos:

$$\int xcos(x)\,dx; \qquad \int x^2 sen(x)\,dx$$

5. Integrales racionales.

Son integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de coeficientes reales y exponentes naturales. El proceso general para su resolución es el siguiente:

1. Se comprueba primeramente que no es inmediata del tipo logaritmo más arcotangente.

2. Se comprueba que el grado de $P(x)$ no sea mayor que el de $Q(x)$. Si lo fuera bastaría con efectuar la división de los polinomios $P(x)$ entre $Q(x)$ y nos quedaría una expresión del tipo:

   $$P(x) = R(x) + Q_1(x)Q(x)$$

   y si dividimos la expresión anterior por $Q(x)$ e integramos obtenemos:

   $$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx + \int Q_1(x) dx$$

   donde en la primera integral el grado del numerador es inferior al del denominador, y la segunda integral es inmediata (del tipo potencial). Una vez superado este paso podemos suponer que el denominador es de grado superior al numerador.

3. Se calculan las raíces o ceros del denominador, y nos enfrentamos a los siguientes casos:

   a) **Los ceros del denominador son reales y simples.**
   En este caso los pasos a seguir son los siguientes:
   Primeramente se efectúa la descomposición de $P(x)/Q(x)$ en factores simples. Una vez obtenida esta descomposición observemos que la integral de partida se ha transformado en una suma de integrales inmediatas del tipo logaritmo:

   $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a_0}dx + \int \frac{B}{x-a_1}dx + \dots$$

   donde $a_0, a_1, \dots$ son los ceros reales y simples de $Q(x)$

   b) **Los ceros del denominador son reales y múltiples.**
   Los pasos a seguir son similares al caso anterior salvo que la descomposición en este caso es:
   Si a_0 es un cero simple, a_1 es un cero de multiplicidad 3, entonces tenemos:

   $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a_0}dx + \int \frac{B}{x-a_1}dx + \int \frac{C}{(x-a_1)^2}dx + \int \frac{D}{(x-a_1)^3} + \dots$$

   Y llegado a este extremo se tiene que las integrales a las que hemos llegado son inmediatas del tipo logaritmo y del tipo potencial.

   c) **El denominador tiene una raíz imaginaria simple.**
   Primeramente vamos a tratar este caso de forma muy particular; buscamos resolver una integral del tipo:

   $$\int \frac{Mx+N}{x^2+\beta x+\gamma}dx$$

   donde el denominador tiene una raíz compleja simple. Es decir, nos enfrentamos a un caso en que el denominador es un polinomio de grado 2 irreducible. Como el denominador es de la forma $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ de manera que $a+bi$ es su raíz entonces lo podemos expresar de la siguiente forma:

   $$x^2 + \beta x + \gamma = (x-a)^2 + b^2$$

   Por lo tanto, lo que intentamos resolver es una expresión del tipo:

   $$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx$$

Pasemos, pues, al cálculo de dicha integral:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx = \int \frac{Mx}{(x-a)^2+b^2}dx + \int \frac{N}{(x-a)^2+b^2}dx$$

Resolvamos las integrales siguiendo un orden. La primera de las dos integrales resultantes la descomponemos de la siguiente forma:

$$M\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x}{(x-a)^2+b^2}dx == \frac{M}{2}\int \frac{2x\ -2a+2a}{(x-a)^2+b^2}dx$$

Por lo tanto, esta primera integral la hemos transformado en otras dos:

$$\frac{M}{2}\int \frac{2x-2a}{(x-a)^2+b^2}dx \qquad (1)$$

$$\frac{M}{2}\int \frac{2a}{(x-a)^2+b^2}dx \qquad (2)$$

No olvidemos que (1) y (2) componen la primera integral y también tenemos que resolver la segunda, que era:

$$N\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} \qquad (3)$$

Procedamos con los cálculos:

$$(1) = \frac{M}{2}\int \frac{2x-2a}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{M}{2}\ln|(x-a)^2+b^2|$$

Por otra parte, sacando fuera $2a$ de la integral (2) y sumándola con la integral (3), obtenemos:

$$(2)+(3) = Ma\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} + N\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = (Ma+N)\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} =$$

(dividiendo numerador y denominador por b^2)

$$= (Ma+n)\int \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{(x-a)^2}{b^2}+1}dx =$$

(que es una integral inmediata del tipo arco-tangente)

$$= \frac{Ma+N}{b}\int \frac{\frac{1}{b}}{(\frac{x-a}{b})^2+1}dx = \frac{(Ma+N)}{b}arctg(\frac{x-a}{b})$$

Por lo tanto, la integral que en principio buscábamos resolver resultará de sumar los resultados obtenidos al calcular (1) y (2)+(3), con lo que obtenemos:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{Ma+N}{b} arctg(\frac{x-a}{b}) + \frac{M}{2}\ln|(x-a)^2+b^2| + C$$

A este tipo de integrales comunmente se las denomina del tipo $arco - tangente$ más *logaritmo*.

d) **Los ceros del denominador son reales (múltiples o no) y complejos de multiplicidad 1.**

Para ver este caso con más claridad supongamos que nuestro denominador tiene una raíz real simple que denotaremos por c y una imaginaria simple o de multiplicidad 1 que denotaremos por $a+bi$. Entonces la descomposición en fracciones es la siguiente:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-c}dx + \int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx$$

La primera integral que aparece es inmediata del tipo logaritmo y la segunda es del tipo arco-tangente más logaritmo que hemos tratado justamente en el caso anterior.

Ejemplos:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx; \qquad \int \frac{1}{x^3+1}dx$$

6. Método de integración por cambio de variable.

Ante integrales cuya resolución no se puede realizar como inmediata, ni racional, ni encaja con los modelos de integración por partes, se recurre al método de **sustitución o cambio de variable**, el cual es uno de los métodos de integración más amplios.

6.1. Método

1.Forma directa: Consiste en encontrar una función $x = g(t)$, donde $dx = g'(t)dt$, que al sustituirla por x bajo el signo integral, convierta la integral en otra más sencilla (en la nueva variable t), normalmente en una inmediata o racional. Finalmente, una vez realizada la integral en la variable t, hay que deshacer el cambio y volver a la variable x.

2.Forma recíproca: Consiste en hacer el cambio $t = u(x)$, donde $dt = u'(x)dx$, y se despeja x y dx sustituyéndolos en el integrando. Para terminar el proceso se halla la integral en la variable t y se deshace el cambio.

Nota: Si la integral que obtenemos al hacer estos cambios es más complicada de resover que la inicial, obviamente el camio elegido no es el más apropiado y buscaremos otro cambio más adecuado.

6.2. Tipos de sustitución.

La expresión $R(a(x), b(x))$ bajo el signo integral nos indicará que estamos haciendo referencia a expresiones del tipo:

$$\int \frac{1}{a(x)+b(x)}dx; \qquad \int \frac{a(x)}{b(x)}dx; \qquad \cdots$$

es decir, expresiones racionales en las que se ven ligadas las funciones $a(x)$ y $b(x)$ mediante las operaciones usuales de suma, resta, multiplicación y división.

1. Integrales de funciones exponenciales.

   a) De la forma $\int R(a^x)dx$ ó $\int R(x, a^x)dx$.
   Se le practica el cambio:

   $$a^x = t$$

   Y si calculamos el resto de elementos útiles para la sustitución tenemos:

   $$a^x = t \Longrightarrow \ln(a^x) = \ln t \Longrightarrow x \ln a = \ln t \Longrightarrow x = \frac{1}{\ln a} \ln t$$

   derivando:

   $$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{t}$$

   y por tanto:

   $$dx = \frac{1}{\ln a\, t}dt$$

   b) De la forma $\int R(e^x)dx$ ó $\int R(x, e^x)dx$.
   Se le practica el cambio:

   $$e^x = t$$

   Y razonando como antes llegamos a:

   $$x = \ln t; \qquad y \qquad dx = \frac{dt}{t}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} dx$$

2. <u>Integrales logarítmicas.</u>

   Son de la forma $\int R(x, \ln x) dx$. Se le hace el cambio:

   $$\ln x = t$$

   Los demás cálculos para la sustitución son los siguientes:

   $$\ln x = t \Longrightarrow x = e^t$$

   derivando obtenemos:

   $$dx = e^t dt$$

   Ejemplo:

   $$\int \frac{ln(2x)}{x \ln x} dx$$

3. <u>Integrales de funciones inversas de trigonométricas.</u>

   a) De la forma $\int R(x, arctg(x)\,) dx$. El cambio que hacemos en este caso es:

   $$arctg(x) = t$$

   de donde obtenemos:

   $$x = tg(t)$$

   y derivando esta expresión:

   $$dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

   b) De la forma $\int R(x, arcsen(x)\,)$. Hacemos el cambio:

   $$arcsen(x) = t$$

   de donde obtenemos:

   $$x = sen(t)$$

   y derivando:

   $$dx = \cos t dt$$

c) De la forma $\int R(x, arccos(x)\,)$. Se hace el cambio:

$$arccos(x) = t$$

y obtenemos lo siguiente para sustituirlo en la integral:

$$x = \cos t$$

y derivando esta expresión:

$$dx = -sen(t)dt$$

Ejemplo:

$$\int \frac{arctg(x/2)}{4+x^2}dx$$

4. Integrales de funciones trigonométricas.

Esencialmente son de la forma $\int R(sen(x), cos(x)\,)$. Según sea la paridad del integrando con respecto a la función seno o coseno distinguiremos los siguientes casos:

a) El integrando es impar en seno.
Formalmente se dá este caso si $R(-sen(x), cos(x)) = -R(sen(x), cos(x))$.
La sustitución a efectuar en este caso es:

$$cos(x) = t$$

Calculemos los elementos necesarios para la sustitución:

$$cos(x) = t \Longrightarrow x = arccos(t)$$

derivando esta expresión llegamos a:

$$dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

De la identidad $sen^2x + cos^2x = 1$, obtenemos que:

$$sen(x) = \sqrt{1 - cos^2x} \Longrightarrow sen(x) = \sqrt{1-t^2}$$

En resumen, lo que realmente necesitamos para este cambio es:

$$cos(x) = t, \qquad sen(x) = \sqrt{1-t^2}, \qquad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

b) El integrando es impar en coseno. Este caso se obtiene cuando $R(sen(x), -cos(x)) = -R(sen(x), cos(x))$ El cambio correcto en este caso es:

$$sen(x) = t$$

Efectuemos las operaciones oportunas para poder realizar el cambio de variables deseado:

$$sen(x) = t \Longrightarrow x = arcsen(t)$$

si derivamos:

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

y usando la misma igualdad que anteriormente obtenemos los cálculos necesarios:

$$sen(x) = t, \qquad cos(x) = \sqrt{1-t^2}, \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

c) El integrando es par en seno y coseno. Este caso se traduce por $R(-sen(x), -cos(x)) = R(sen(x), cos(x))$. El cambio a realizar es:

$$tg(x) = t$$

Calculemos los elementos necesarios para llevar a cabo la sustitución:

$$tg(x) = t \Longrightarrow x = arctg(t) \Longrightarrow dx = \frac{dt}{1+tg^2x} \Longrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Ahora bien:

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} \Longrightarrow sen(x) = t(cos(x)) = t\sqrt{1-sen^2x}$$

elevando al cuadrado la expresión anterior obtenemos:

$$sen^2x = t^2(1-sen^2x) \Longrightarrow sen^2x = t^2 - t^2sen^2x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow sen^2x(1-t^2) = t^2 \Longrightarrow sen^2x = \frac{t^2}{1+t^2} \Longrightarrow sen(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Partiendo de nuevo de

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \Longrightarrow cos(x) = \frac{sen(x)}{t}$$

y usando el cálculo anterior obtenemos que:

$$cos(x) = \frac{t}{t\sqrt{1+t^2}} \Longrightarrow cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Recapitulando todos los cálculos realizados, nos centramos en los que nos serán de utilidad para aplicar el cambio de variable en cuestión:

$$tg(x) = t, \quad sen(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

d) El integrando no está englobado en ninguno de los casos anteriores.
Realizaremos el llamado *cambio universal*. Este cambio también se puede aplicar a los casos anteriores.
El cambio a efectuar es el siguiente:

$$tg(\frac{x}{2}) = t$$

Calculemos los elementos necesarios para este cambio de variable:

$$\frac{x}{2} = arctg(t) \Longrightarrow x = 2arctg(t) \Longrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Usando las fórmulas trigonométricas:

$$sen^2 x = \frac{1-cos(2x)}{2} \Longrightarrow sen^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-cos(x)}{2} \qquad (1)$$

$$cos^2 x = \frac{1+cos(2x)}{x} \Longrightarrow cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+cos(x)}{x} \qquad (2)$$

y dividiendo miembro a miembro (1) entre (2) obtenemos:

$$\frac{sen^2(\frac{x}{2})}{cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-cos(x)}{1+cos(x)} = tg^2(\frac{x}{2})$$

luego:

$$\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)} = t^2$$

despejando:

$$1-cos(x) = t^2(1+cos(x)) \Longrightarrow 1-cos(x) = t^2 + t^2 cos(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1-t^2 = cos(x)(1+t^2) \Longrightarrow cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Por otra parte tenemos que:

$$sen(x) = \sqrt{1-cos^2 x} = \sqrt{1-\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+t^4+2t^2-1-t^4+2t^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Reagrupando todos los cálculos efectuados y destacando sólo los necesarios para este tipo de sustitución tenemos:

$$cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Ejemplos:

$$\int \frac{sen(x)}{1+4cos^2 x}dx; \qquad \int \frac{dx}{1+sen(x)+cos(x)}$$

5. Integrales irracionales.

   Son de la forma:

   $$\int R(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$$

   El cambio a efectuar en este caso es:

   $$\frac{ax+b}{cx+d} = t^M \quad siendo \quad M = m.c.m.\{p, \ldots, s\}$$

6. Integrales abelianas.

   Algunos de los tipos más comunes son:

   a) De la forma $\int R(x, \sqrt{k^2-x^2})dx$.

   Para esta situación se le practica un cambio del tipo:

   $$x = k\, sen(t)$$

   b) De la forma $\int R(x, \sqrt{x^2-k^2})dx$.

   Si nos encontramos frente a un caso así realizaremos el cambio:

   $$x = k\, sec(t) = k\, \frac{1}{cos(t)}$$

c) De la forma $\int R(x, \sqrt{x^2+k^2})dx$. Realizamos el siguiente cambio:

$$x = k\,tg(t)$$

d) De la forma $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Este tipo de intregrales pueden transformarse en alguna de uno de los tipos anteriores descomponiendo el polinomio de segundo grado como el cuadrado perfecto de un polinomio de primer grado $+/-$ una constante.

Nota: Este tipo de cambio de variables se verá en la relación de problemas.

7. Apéndice.

En esta sección encontraremos algunas fórmulas trigonométricas de interés.

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

$1 + tg^2x = sec^2x$	$1 + cotg^2x = cosec^2x$
$sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$	$cos(2x) = cos^2x - sen^2x$
$sen^2x = \frac{1-cos(2x)}{2}$	$cos^2x = \frac{1+cos(2x)}{2}$

Otras fórmulas trigonométricas que también pueden ser de utilidad son:

$$sen(x) + sen(y) = 2sen(\frac{x+y}{2})cos(\frac{x-y}{2})$$

$$sen(x) - sen(y) = 2cos(\frac{x+y}{2})sen(\frac{x-y}{2})$$

$$cos(x) + cos(y) = 2cos(\frac{x+y}{2})cos(\frac{x-y}{2})$$

$$cos(x) - cos(y) = -2sen(\frac{x+y}{2})sen(\frac{x-y}{2})$$

8. Bibliografía.

APOSTOL, T.M.; *Calculus, vol. I*; Ed. Reverté.
BOYER, C.; *Una historia de la matemática*; Ed. Alianza.
COQUILLAT, F.; *Cálculo integral*; Ed. Tebar Flores.
DEMIDOVICH, B.P.; *5000 problemas de Análisis Matemático*; Ed. Paraninfo.

El libro de Coquillat es especialmente útil para aprender las herramientas básicas del Cálculo Integral y por ello os lo recomiendo vívamente pues, aparte de en 2º de Bachillerato, seguro que os resulta de utilidad en, al menos, los dos primeros años de carrera. Si tenéis ocasión echadle un vistazo y guardadlo en mente para posibles consultas, tanto el año que viene como cuando estéis realizando vuestros estudios universitarios.