MATEMÁTICAS BÁSICAS

LEYES DE EXPONENTES Y LOGARITMOS

LEYES DE EXPONENTES

Sea un número real x. Si se multiplica por sí mismo se obtiene $x \cdot x$. Si a este resultado se multiplica nuevamente por x resulta $x \cdot x \cdot x$. De manera sucesiva, si x se multiplica por si misma n veces, se obtiene: $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \quad veces}$

Para simplificar este tipo de expresiones se acostumbra utilizar una notación abreviada, tal que:

$$x \cdot x = x^2$$

$$x \cdot x \cdot x = x^3$$

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$$

$$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$$

y en general:

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \quad veces} = x^n$$

Donde x es llamada *base* y el número n escrito arriba y a su derecha, es llamado *exponente*. El exponente indica el número de veces que la base se toma como factor.

Primera ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m también diferentes de cero. Entonces, se cumple que:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Al multiplicar potencias con la misma base, se mantiene la base y se suman los exponentes.

Ejemplos.

1) $(x^3)(x^2) = x^{3+2} = x^5$

2) $(4a^2)(5a^6) = 20a^8$

3) $(2k^4)(-k^2)(5k^7) = -10k^{13}$

4) $(8ab^3)\left(\frac{3}{4}a^2 b\right) = 6a^3 b^4$

5) $\left(\frac{6}{5}p^3 q^5\right)\left(-\frac{8}{4}p^6 q^4\right)\left(\frac{1}{12}q\right) = -\frac{48}{240}p^9 q^{10} = -\frac{1}{5}p^9 q^{10}$

Segunda ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m también diferentes de cero. Entonces, se cumple que:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Al dividir potencias con la misma base, se mantiene la base y se restan los exponentes.

Ejemplos.

1) $\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$

2) $\frac{10a^8}{-5a^3} = -2a^5$

3) $\frac{-28k^7m^3}{-7k^5m} = 4k^2m^2$

4) $\frac{\frac{2}{3}a^6}{\frac{1}{4}a^4} = \frac{8}{3}a^2$

5) $\frac{-32x^3y^6z^7}{48x^2y^2z} = -\frac{2}{3}xy^4z^6$

Tercera ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero. Si en la ley anterior, se hace que $n = m$, se tiene que: $\frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$.

Pero al dividir una expresión por si misma el resultado es la unidad, así que se cumple que:

$$x^0 = 1$$

Cualquier base diferente de cero elevada a la potencia cero es uno.

1) $\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0 = 1$

2) $5a^0 = 5(1) = 5$

3) $(xyz)^0 = 1$

4) $\dfrac{27a^3}{9a^3} = 3$

5) $\dfrac{x^3x^4x^6}{-x^6x^7} = \dfrac{x^{13}}{-x^{13}} = -x^{13-13} = -x^0 = -1$

Cuarta ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m también diferentes de cero. Entonces, se cumple que:

$$\left(x^n\right)^m = x^{n\cdot m}$$

Al elevar una potencia a otra potencia, se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

Ejemplos.

1) $\left(x^3\right)^2 = x^{3(2)} = x^6$
2) $\left(a^3\right)^4 = a^{3(4)}a^{12}$
3) $\left(e^5\right)^3 = e^{5(3)} = e^{15}$

Quinta ley de los exponentes

Sean dos números reales x y y diferentes de cero y un número natural n también diferente de cero. Entonces, se cumple que:

$$(xy)^n = x^n y^n$$

El producto de uno o más factores que se elevan todos a la vez a un exponente es igual a un producto de cada factor elevado al exponente.

Ejemplos.

1) $\left(2a^2\right)^5 = 2^5 \cdot a^{10} = 32a^{10}$
2) $\left(-3k^4\right)^3 = (-3)^3 \cdot k^{12} = -27k^{12}$
3) $\left(5ab^3\right)^4 = 5^4 \cdot a^4b^{12} = 625a^4b^{12}$
4) $\left(4xy^2\right)^2 = 4^2 \cdot x^2 \cdot y^6 = 16x^2y^6$
5) $\left(10m^5n^2p^3\right)^6 = 10^6 \cdot m^{30} \cdot n^{12}p^{18} = 1'000,000m^{30}n^{12}p^{18}$

Sexta ley de los exponentes

Sean dos números reales x y y diferentes de cero y un número natural n también diferente de cero. Entonces, se cumple que:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad y \neq 0$$

El cociente de uno o más factores que se elevan todos a la vez a un exponente es igual al cociente de cada factor elevado al exponente.
Ejemplos.

1) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$

2) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^3 = \frac{(ab)^3}{(cd)^3} = \frac{a^3b^3}{c^3d^3}$

3) $\left(\frac{5p^3}{3}\right)^4 = \frac{(5p^3)^4}{3^4} = \frac{5^4(p^3)^4}{3^4} = \frac{625p^{12}}{81}$

4) $\left(\frac{8k^3}{4m^2}\right)^4 = \left(2\frac{k^3}{m^2}\right)^4 = 2^4\frac{(k^3)^4}{(m^2)^4} = 16\frac{k^{12}}{m^8}$

5) $\left(\frac{-4x^3y^5}{3w^4z^2}\right)^6 = \frac{(-4)^6(x^3)^6(y^5)^6}{(3)^6(w^4)^6(z^2)^{12}} = \frac{4{,}096x^{18}y^{30}}{729w^{24}z^{12}}$

Séptima ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero. Si n es un número entero diferente de cero, por las leyes anteriores se cumple que:

$$\frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0 = x^n \cdot x^{-n} = 1$$

Pero el recíproco del número real x^n se definió como $\frac{1}{x^n}$, ya que cumple con $x^n \cdot \frac{1}{x^n} = 1$.
Comparando las expresiones, se llega a:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Elevar una expresión a una potencia entera negativa, equivale a formar una fracción con numerador uno y cuyo denominador es la misma expresión pero con la potencia positiva.

Ejemplos.

1) $x^{-1} = \frac{1}{x}$

2) $6a^{-3} = \frac{6}{a^3}$

3) $\dfrac{24p^3q^5}{-3p^7q^{10}} = -8p^{-4}q^{-5} = -\dfrac{8}{p^4q^5}$

4) $\dfrac{27a^5b^3c^4}{18a^{11}bc^5} = \dfrac{3}{2}a^{-6}b^2c^{-1} = \dfrac{3b^2}{2a^6c}$

5) $\left(2x^3\right)^{-4} = 2^{-4}x^{-12} = \dfrac{1}{2^4}\cdot\dfrac{1}{x^{12}} = \dfrac{1}{16x^{12}}$

LOGARITMOS

Sea la expresión: $a^b = x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Se denomina *logaritmo* base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número. Es decir:

$$log_a\ x = b$$

que se lee como "el logaritmo base a del número x es b" y como se puede apreciar, un logaritmo representa un exponente.

La constante a es un número real positivo distinto de uno, y se denomina *base* del logaritmo. La potencia a^b para cualquier valor real de b solo tiene sentido si $a > 0$.

Ejemplos.

1) $5^2 = 25 \;\Rightarrow\; log_5\ 25 = 2$

2) $3^4 = 81 \;\Rightarrow\; log_3\ 81 = 4$

3) $8^3 = 512 \;\Rightarrow\; log_8\ 512 = 3$

4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64} \;\Rightarrow\; log_{\frac{1}{2}}\ \dfrac{1}{64} = 6$

5) $4^{-5} = \dfrac{1}{1024} \;\Rightarrow\; log_4\ \dfrac{1}{1024} = -5$

Logaritmos Decimales:

Se llaman logaritmos decimales a los logaritmos que tienen por base el número diez. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base:

$$log_{10}\ x = log\ x$$

Logaritmos Naturales:

Se llaman logaritmos naturales (también llamados neperianos) a los logaritmos que tienen por base el número irracional $e = 2.71828182845 9\cdots$, y se denotan como ln o por L:

$$log_e \ x = ln \ x = L \ x$$

Ejemplos.

$log_{10} \ 45 = log \ 45 \approx 1.653212$

$log_e \ 168 = ln \ 168 \approx 5.123963$

Para potencias enteras de diez, los logaritmos decimales cumplen con:

$10^{-2} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad log \ 0.01 = -2$

$10^{-1} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad log \ 0.1 = -1$

$10^{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad log \ 1 = 0$

$10^{1} = 10 \quad \Rightarrow \quad log \ 10 = 1$

$10^{2} = 100 \quad \Rightarrow \quad log \ 100 = 2$

$10^{3} = 1{,}000 \quad \Rightarrow \quad log \ 1{,}000 = 3$

$10^{4} = 10{,}000 \quad \Rightarrow \quad log \ 10{,}000 = 4$

Los logaritmos decimales de los números comprendidos entre otros dos, cuyos logaritmos decimales son números enteros, son números decimales. Todo número decimal se compone de parte entera y parte decimal. La parte entera recibe el nombre de *característica* y la parte decimal, *mantisa*.

La parte entera del logaritmo o característica depende del intervalo en el que se defina el número y la parte decimal o mantisa del valor de las cifras significativas del número.

Por ejemplo, para $log \ 45 = 1.653212 \ \cdots$, la característica es 1 y la mantisa es $0.653212 \cdots$.

La mantisa siempre es positiva, pero la característica puede ser cero si el número está comprendido entre 1 y 10, es positiva, sí el número es mayor que 10 o negativa si el número es menor que 1. Las potencias de 10 sólo tienen característica, su mantisa es 0. En el logaritmo de un número menor que 1 la característica es negativa, pero la mantisa es positiva. Por ejemplo $log \ 0.5 \approx -1 + 0.698970$ y no puede escribirse como -1.698970, pues esto indica que tanto la característica como la mantisa son negativas. El modo correcto de escribirlo, indicando que sólo la característica es negativa, es $\bar{1}.698970$.

Ejemplos.

1) Para $log \ 624 \approx 2.795184$, la característica es 2

2) Para $log \ 7 \approx 0.845098$, la característica es 0

3) Para $log \ 0.029 \approx \bar{2}.462398$, la característica es -2

Las propiedades de los logaritmos son las siguientes:

1) $log_a \ 1 = 0$

2) $log_a \ a = 1$

3) $log_a \ (u \cdot v) = log_a u + log_a \ v$

4) $log_a \left(\frac{u}{v}\right) = log_a u - log_a v$

5) $log_a u^n = n \cdot log_a u$

6) $log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} log_a u$

Ejemplos.
Comprobar las propiedades de los logaritmos.

1) $log\ 10^0 = log\ 1 = 0$

2) $log\ 10 = 1$

3) $log\ (100 \cdot 1{,}000) = log\ 100{,}000 = 5$

que equivale a calcular: $log\ 100 + log\ 1{,}000 = 2 + 3 = 5$

4) $log \left(\frac{1'000{,}000}{100}\right) = log\ 10{,}000 = 4$

que equivale a calcular: $log\, 1'000{,}000 - log\ 100 = 6 - 2 = 4$

5) $log\ 10^2 = log\ 100 = 2$

que equivale a calcular: $2 \cdot log\ 10 = 2(1) = 2$

6) $log\ \sqrt{10{,}000} = log\ 100 = 2$

que equivale a calcular: $\frac{1}{2} \cdot log\ 10{,}000 = \frac{1}{2}(4) = 2$

Ejemplo.

Aplicando las propiedades de los logaritmos, simplificar la siguiente expresión: $log_6 \left[\frac{(5a)(3b)}{2c}\right]^4$

Solución.

$$log_6 \left[\frac{(5a)(3b)}{2c}\right]^4 = 4 log_6 \frac{(5a)(3b)}{2c} = 4[log_6 (5a)(3c) - log_6 2c] = 4(log_6 5a + log_6 3b - log_6 2c)$$

Ejemplo.
Sabiendo que $log\, 100 = 2$ y que $log\ 4 \approx 0.6020$, aplicando las propiedades de los logaritmos y sin usar la calculadora, determinar los valores aproximados de: $log\, 400$, $log\ 25$, $log\, 16$, $log\ 2$.

Solución.

$$log\ 400 = log\ (100)(4) = log\ 100 + log\ 4 \approx 2 + 0.6020 \approx 2.6020$$

$$log\ 25 = log\ \frac{100}{4} = log\, 100 - log\ 4 \approx 2 - 0.0620 \approx 1.398$$

$$log\, 16 = log\ 4^2 = 2 log\ 4 \approx 2(0.0620) \approx 1.204$$

$$log\ 2 = log\ \sqrt{4} = \frac{1}{2} log\ 4 \approx \frac{0.6020}{2} \approx 0.3010$$

Un *antilogaritmo* es el número que corresponde a un logaritmo dado. Consiste en el problema inverso al cálculo del logaritmo de un número. Esto es:

$$log_a\ x = y \quad \Leftrightarrow \quad anti\,log_a\ y = x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

es decir, consiste en elevar la base al número que resulta.

Ejemplo.

$$log_{10}\ 4{,}527 \approx 3.655810 \quad \Leftrightarrow \quad anti\,log_{10}\ 3.655810 \approx 4{,}527 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{3.655810} \approx 4{,}527$$

Cambio de Base:

Dada una base conocida b, para calcular un logaritmo de un número x en cualquier base a, se aplica la siguiente expresión: $log_a\ x = \frac{log_b\ x}{log_b\ a}$.

Por conveniencia, la base elegida para b generalmente es la diez, así que la expresión queda como:

$$log_a\ x = \frac{log_{10}\ x}{log_{10}\ a}$$

Ejemplo.

Calcular: $log_3\ 570$

Solución: se identifican las variables: $a = 3,\ x = 570,\ b = 10$

$$log_3\ 570 = \frac{log\ 570}{log\ 3} \approx \frac{2.755874}{0.477121} \approx 5.776048$$

Comprobación: $3^{5.776048} \approx 570$