1.1.- EXPONENTES Y RADICALES

1) EXPONENTES

Un exponente es un valor índice que me indica el número de veces que se va a multiplicar otro valor conocido como base. El exponente se coloca arriba y a la derecha del valor base. Por ejemplo:

X^n X es el valor base y “n” es el exponente

a^m a es el valor base y “m” es el exponente

$h^{0.5}$ h es el valor base y 0.5 es el exponente

$q^{2/3}$ q es el valor base y 2/3 es el exponente

b^{-5} b es el valor base y -5 es el exponente

-2^7 -2 es el valor base y 7 es el exponente

Obsérvese pues que la base y exponente pueden ser cualquier valor, positivo o negativo, entero o fraccionario. Al conjunto de base y exponente también se le conoce como potencia, es decir, una potencia esta constituida de una base y un exponente. De los ejemplos anteriores:

X^n es una potencia de base X y exponente n
a^m es una potencia de base a y exponente m
b^{-5} es una potencia de base b y exponente -5

Para la operación con potencias se deben seguir ciertas leyes, entre las más importantes destacan:

Leyes de los exponentes

1) Producto de dos potencias de la misma base: cuando se multiplican dos potencias de la misma base, una forma de simplificar la operación es **utilizar la misma base y sumar los exponentes**. Por ejemplo:

$(x^n)(x^m) = x^{n+m}$

$(h^5)(h^2) = h^{5+2} = h^7$

$a^{2/4} \times a^{3/4} = a^{5/4}$

$b^{-6} \times b^{-3} = b^{-9}$

2) Cociente de dos potencias de la misma base: cuando se dividen dos potencias de la misma base, una forma de simplificar la operación es **utilizar la misma base y restar los exponentes**. Por ejemplo:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$\frac{h^5}{h^2} = h^{5-2} = h^3$$

$$\frac{b^{-6}}{b^{-3}} = b^{-6-(-3)} = b^{-6+3} = b^{-3}$$

$$\frac{a^{2/4}}{a^{3/4}} = a^{\frac{2}{4}-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{4}}$$

3) La potencia de una potencia: Se tiene una potencia elevada a otro exponente, en este caso se **utiliza la base de la potencia y los exponentes se multiplican**, por ejemplo:

$(x^n)^m = x^{nm}$

$(5^2)^4 = 5^{2x4} = 5^8 = 390,625$

$(8^{-2})^{-3} = 8^{-2x-3} = 8^6 = 262,144$

$(a^4)^5 = a^{4x5} = a^{20}$

$(h^{2/5})^{1/2} = h^{(2/5\ x1/2)} = h^{2/10}$

4) La potencia del producto de dos factores: el resultado se obtiene elevando cada factor al mismo exponente de la potencia y realizando la multiplicación correspondiente, por ejemplo:

$(xy)^2 = (x^2)(y^2)$

$(5x)^3 = (5^3)(x^3) = 125\ x^3$

$(a^2b)^2 = (a^2)^2\ (b^2) = (a^{2x2})(b^2) = a^4\ b^2$

5) La potencia del cociente de dos factores: el resultado se obtiene elevando cada factor al exponente correspondiente y realizando la división necesaria, por ejemplo:

$$\left[\frac{x}{y}\right]^2 = \frac{x^2}{y^2}$$

$$\left[\frac{5}{x}\right]^3 = \frac{5^3}{x^3} = \frac{125}{x^3} = 125 \quad x^{-3}$$

$$\left[\frac{a^2}{b}\right]^2 = \frac{\left(a^2\right)^2}{b^2} = \frac{a^4}{b^2} = a^4 b^{-2}$$

6.- Potencia de exponente igual a cero: cualquier base elevada a la cero es igual a 1, por ejemplo:

$X^0 = 1$

$-b^0 = 1$

$-2^0 = 1$
$-(2/3)^0 = 1$

$$\left[\frac{a^2}{b}\right]^0 = 1$$

7.- Potencia de exponente igual a uno: cualquier base elevada a la uno es igual al mismo valor de la base, por ejemplo:

$$\left[\frac{a^2}{b}\right]^1 = \left[\frac{a^2}{b}\right]$$

$x^1 = x$

$(a^2)^1 = a^2$

$(-5)^1 = -5$

$$\left[\frac{\sqrt{x}a^2}{\sqrt[3]{b}}\right]^1 = \left[\frac{\sqrt{x}a^2}{\sqrt[3]{b}}\right]$$

8.- Exponentes negativos: si existe una potencia con exponente negativo, éste puede hacerse positivo de la siguiente manera, si la potencia con exponente negativo se encuentra en el numerador, ésta se pasa al denominador con exponente positivo; y si la potencia con exponente negativo se encuentra en el denominador, ésta se pasa al numerador con exponente positivo. Por ejemplo:

$$2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{y^2}{x^{-3}} = y^2x^3$$

$$\frac{8^2}{3^{-3}} = (8^2)(3^3) = (64)(27) = 1728$$

9.- Exponentes fraccionarios: Los exponentes fraccionarios se encuentran ligados a los radicales de la siguiente manera:

$$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad 9^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{9^4} = 5.7995$$

$$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \qquad D^{\frac{1}{2}} = \sqrt{D}$$

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \qquad R^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{R^5}$$

2) RADICALES

La radicación es la operación inversa a la potenciación. Se llama raíz enésima de un número “x” a otro número “y”, que elevado a la “n” da como resultado “x”.

$$y^n = x \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{x} = y$$

$$\sqrt[n]{x} = y$$

n = índice
x = radicando
y = raíz
$\sqrt{\ }$ = signo radical

a) Equivalencias entre radicales y potencias de exponente fraccionario

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

b) Potencia de un radical

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

c) Raíz de un radical

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = a^{\frac{1}{nm}}$$

Ejercicios:

$$\frac{x^5}{x^3} = x^2 \qquad \frac{y^{15}}{y^{10}} = y^5 \qquad \frac{(1+i)^5}{(1+i)^3} = (1+i)^2 \qquad \frac{x^3 y^2}{x^2 y} = xy \qquad (2a^3) = 16a^{12}$$

$$\left[\frac{x^3}{y^2}\right]^2 = \frac{x^6}{y^4} \qquad \frac{(2xy)^3}{(xy)^2} = \frac{8x^3y^3}{x^2y^2} = 8xy \qquad x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{y}$$

$$y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y} \qquad 64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} \qquad 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}}$$

Resuelva los siguientes ejercicios:

1.- Calcule el diámetro de una tubería si el área de la circunferencia es de 0.05 m^2, considere que la ecuación para el área es la siguiente:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \qquad D^2 = \frac{4A}{\pi} \qquad D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(0.05)}{3.1416}} = 0.25 \quad m$$

2.- Calcule el valor de la velocidad del agua, considerando que las pérdidas por fruición son de 0.5 m (recuerde que la aceleración por gravedad es igual a 9.8 m/s2), utilice la siguiente ecuación:

$$hf = k\frac{v^2}{2g} \qquad v^2 = \frac{2*g*hf}{k}$$

$$v = \sqrt{\frac{2*g*hf}{k}} = \sqrt{\frac{2\left(9.8\ \frac{m}{s^2}\right)\left(0.5\ m\right)}{0.25}} = \sqrt{\frac{9.8\ \frac{m^2}{s^2}}{0.25}} = 6.26\ m/s$$

3.- Despeje el valor del radio hidráulico (r) en la siguiente ecuación para calcular la velocidad de un flujo de agua:

$$v = \frac{1}{n}r^{\frac{2}{3}}s^{\frac{1}{2}} \qquad r^{\frac{2}{3}} = \frac{v*n}{s^{1/2}} \qquad r = \sqrt[2]{\left(\frac{v*n}{s^{1/2}}\right)^3} = \left(\frac{v*n}{s^{1/2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1.2.- RAZONES Y PROPORCIONES

Al cociente entre dos números se le llama “razón” y a la igualdad de dos razones se le llama proporción. Una razón puede denotarse de las siguientes formas:

“a” es a “b”
a : b
a/b

donde “a” y “b” se llaman términos de la razón.

Ejemplo

En una granja de puercos existen 11 cerdos machos y 15 hembras:

a) encuentre la razón de los machos respecto a las hembras
b) encuentre la razón de las hembras respecto al total

a) 11 es a 15	11:15	11/15
b) 15 es a 26	15:26	15/26

Una proporción es un tipo especial de ecuación que enuncia la igualdad entre dos razones, se puede escribir así:

a:b = c:d
“a” es a “b” como “c” es a “d”
a/b = c/d

Para evaluar una proporción se usa la multiplicación en cruz:

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces ad = bc

A y d se conocen como externos, mientras que b y c se conocen como medios.

El producto de los medios es igual al producto de los externos.

Las razones y proporciones se aplican en:

a) La regla de tres
b) La regla de la tortilla

Regla de tres

Si se conocen tres de los cuatros valores que aparecen en una proporción se puede encontrar el cuarto valor con facilidad.

Ejercicio No. 1.- Determinar el valor de x en la siguiente proporción:

$$\frac{x}{3} = \frac{25}{15}$$

De acuerdo con el procedimiento para evaluar una proporción, la operación quedaría:

Se multiplica cruzado

(x)(15) = (3)(25)

15 x = 75

x = 75/15 =5

Ejercicio No. 2.- Si 0.454 kg es igual a 1 libra

a) determinar el peso en libras de un lechón que pesa 7.5 kg

$$\frac{0.454 \quad kg}{7.5 \quad kg} = \frac{1 \quad libra}{x}$$

Se multiplica cruzado

(0.454)(x) = (7.5)(1)

0.454 x = 7.5

x = 7.5/0.454 = 16.52 libras

el lechón pesa 16.52 libras

b) si un cerdo pesa 121 libras ¿A cuántos kilogramos es equivalente?

$$\frac{0.454 \quad kg}{x} = \frac{1 \quad libra}{121 \quad libras}$$

Se multiplica cruzado

(0.454)(121) = (1)(x)

54.934 = x

121 libras = 54.934 kg

Ejercicio No. 3.- Un costal de 30 libras de fertilizante se utiliza para un lote de 2500 pies cuadrados

a) ¿Cuántas libras se necesitan para cubrir un área de 16000 pies cuadrados?

$$\frac{30 \quad libras}{x} = \frac{2500 \quad pies\, cuadrados}{16000 \quad pies \quad cuadrados}$$

Se multiplica cruzado

(30)(16000) = (2500) (x)

480,000 = 2500 x

x = 480000/2500 = 192

Se requieren 192 libras

b) ¿Cuántos costales se necesitan?

$$\frac{1 \quad \cos tal}{x} = \frac{30 \quad libras}{192 \quad libras}$$

Se multiplica cruzado

(1)(192) = (30)(x)

192 = 30 x

x = 192/30 = 6.4

Se necesitan 6.4 costales

Ejercicio No. 4.- Las instrucciones en una botella de insecticida dice “usar 5 ml de insecticida por cada galón de agua”, si el tanque de aplicación tiene una capacidad de 20 litros (1 galón = 3.785 lt), calcular cuanto insecticida debe aplicarse a un tanque.

$$\frac{5 \quad ml}{x} = \frac{3.785 \quad lt}{20 \quad litros}$$

Se multiplica cruzado

(5)(20) = (3.785)(x)

100 = 3.785 x

x = 100/3.785 = 26.4

Se necesitan 26.4 ml de insecticida

Ejercicio No. 5.- Realice las siguientes conversiones de un sistema de unidades a otro.

a) 520 millas a kilómetros (1 milla = 1.609 km)
b) 28 centímetros a pulgadas (1 pulg = 2.54 cm)
c) 16 pies a metros (1 pie = 0.3048 m)
d) 8.5 metros a centímetros (1 m = 100 cm)
e) 48 pulgadas a centímetros
f) 8 galones a litros (1gal = 3.785 lt)

Ejercicio No. 6.- Si 4 tractores terminan un trabajo en 10 días ¿en cuantos días lo harán 6 tractores?

Ejercicio No. 7.- En una parcela experimental se siembra maíz en 2 hectáreas. Si se cosecha una superficie muestra en 200 m2 con una producción de 160 kg ¿Cuál será la producción en la superficie total?

1.3.- PORCENTAJES

Es la relación de un número cualquiera con respecto a otro, de lo que se obtiene una fracción, que al multiplicar por cien se obtiene el porcentaje.

Ejercicio No. 1.- De una parcela de 20 hectáreas se cosechan únicamente 18 ha ¿Qué porcentaje representa la superficie cosechada?

$\frac{18}{20} = 0.9$ forma de fracción $\frac{18}{20} = 0.9x100 = 90\%$ forma porcentual

Ejercicio No. 2.- Un agricultor tiene 200 ha, piensa sembrar diferentes cultivos, determine que porcentaje representa la superficie de cada cultivo.

Maíz = 50 ha
Frijol = 30 ha
Tomate = 80 ha
Chile = 40 ha

Total = 200 ha

$$Maíz = \frac{50}{200} x100 = 25\%$$

$$Frijol = \frac{30}{200} x100 = 15\%$$

$$Tomate = \frac{80}{200} x100 = 40\%$$
$$Chile = \frac{40}{200} x100 = 20\%$$

La suma total de porcentajes debe ser igual a 100%

Ejercicio No. 3.- El garbanzo tiene un rendimiento de 2 ton/ha, si con buenas prácticas de cultivo se incrementa el rendimiento en 0.5 ton/ha ¿en que porcentaje se incrementó el rendimiento?

$\frac{0.5}{2} x100 = 25\%$ el rendimiento se incrementó en un 25%

Ejercicio No. 4.- El sorgo en temporal tiene un rendimiento de 3.5 ton/ha, si con el riego se incrementa el rendimiento en 80% ¿Cuál sería el nuevo rendimiento?

$3.5 * 0.8 = 2.8 \quad ton/ha$ el incremento es de 2.8 ton/ha que sumados a los 3.5 anteriores, el nuevo rendimiento es de 6.3 ton/ha. Una forma para obtener el resultado directamente, es multiplicar el rendimiento anterior por 1.80

3.5 x 1.80 = 6.3

Si el incremento fuera del 20% entonces sería 3.5 x 1.20 = 4.2 ton/ha
Si el incremento fuera del 45% entonces sería 3.5 x 1.45 = 5.075 ton/ha
Si el incremento fuera del 10% entonces sería 3.5 x 1.10 = 3.85 ton/ha

Ejercicio No. 5.- El cultivo de garbanzo tiene un rendimiento promedio de 2 ton/ha, si una infección de rabia de garbanzo reduce el rendimiento en un 20%, ¿cual será el nuevo rendimiento?

$2 * 0.2 = 0.4 \quad ton/ha$ la disminución es de 0.4 ton/ha que restados a los 2 ton/ha del rendimiento anterior, el nuevo rendimiento es de 1.6 ton/ha.

Ejercicio No. 6.- La recomendación para usar un fungicida dice que el producto se debe aplicar en una solución al 5%, si el tanque fumigador es de 20 litros ¿Qué cantidad de fungicida se debe agregar a la solución en un tanque?

(20)(0.05) = 1 litro de fungicida para los 20 litros de solución

1.4.- TRIGONOMETRA

La Trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en los que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir, una distancia que no podía ser medida de forma directa, como la distancia entre la Tierra y la Luna. Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el flujo de corriente alterna. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana y la trigonometría esférica.

1.4.1 Razones Trigonométricas

Una razón trigonométrica es un valor numérico asociado a un ángulo que permite relacionar operativamente los ángulos y los lados de un triángulo. Las razones trigonométricas más importantes son seno, coseno y tangente.

$$Sen = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa}$$

$$Cos = \frac{cateto \quad adyacente}{hipotenusa}$$

$$Tan = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente}$$

Otras razones trigonométricas son la cotangente, secante y cosecante:

$$Cot = \frac{cateto \quad adyacente}{cateto \quad opuesto}$$

$$Sec = \frac{hipotenusa}{cateto \quad adyacente}$$

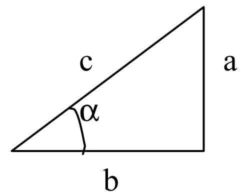
$$Co\sec = \frac{hipotenusa}{cateto \quad opuesto}$$

Una relación importante en trigonometría es la que establece el Teorema de Pitágoras:

1.4.2 Teorema de Pitágoras

"El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de cada uno de los catetos"

$c^2 = a^2 + b^2$

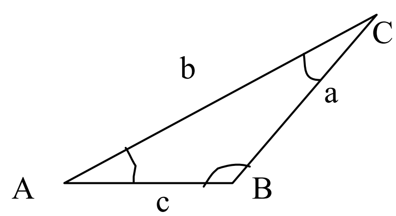


c = hipotenusa
a = cateto opuesto
b = cateto adyacente

1.4.3 Ley de los senos

La ley de los senos es una relación de tres igualdades que siempre se cumplen entre los lados y ángulos de un triángulo cualquiera y que es útil para resolver ciertos tipos de problemas de ángulos (cuando los triángulos no son rectángulos).

La ley de los senos establece que en todo triángulo oblicuoángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



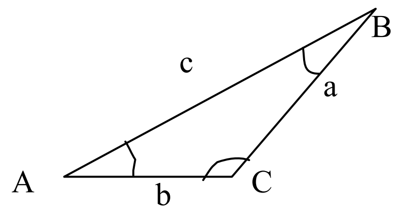
$$\frac{a}{Sen\ \ A} = \frac{b}{Sen\ \ B} = \frac{c}{Sen\ \ C}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo y A, B y C son los ángulos.

1.4.4 Ley de los cosenos

La ley de los cosenos permite calcular la longitud de un lado de un triángulo cualquiera conociendo los otros dos lados y la medida del ángulo comprendido entre éstos.

Esta ley establece que "en todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ambos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos".



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * Cos \quad A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * Cos \quad B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * Cos \quad C$$

Nota: En esta última ecuación, si se trata de un triángulo rectángulo y el ángulo considerado (C) es de 90°, el coseno de 90 es cero, por tanto quedaría el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * Cos \quad 90$$

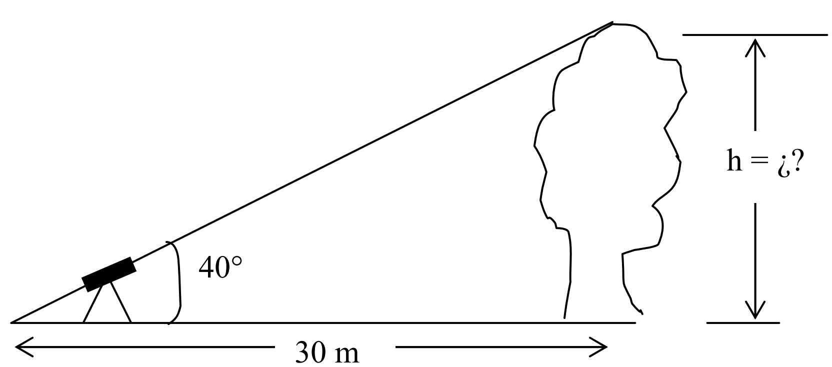
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * (0)$$

al multiplicar 2*a*b*0 = 0

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ejercicios de aplicación

Ejercicio No. 1.- Un agricultor quiere conocer la altura de los árboles frutales en su huerta. Si coloca el tránsito a una distancia de 30 m y el ángulo de inclinación para visualizar la copa de los árboles es de 40°. Determine la altura.



Se requiere una relación que involucre a los lados y el ángulo del problema. Se selecciona una de las razones trigonométricas. Para este caso la tangente nos permite conocer el valor de h en función del ángulo conocido y el valor de la distancia.

$$Tan = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente}$$

El cateto opuesto es h y el cateto adyacente es la distancia de 30 m. Se sustituyen estos valores en la ecuación:

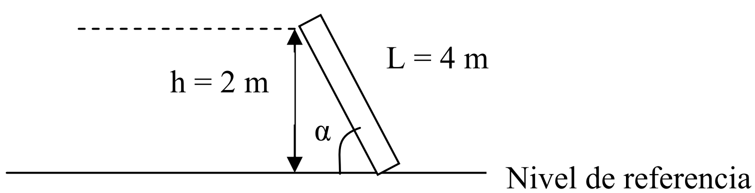
$$Tan \quad 40° = \frac{h}{30}$$

despejando el valor de h

$$(Tan \quad 40°)(30) = h$$

h = (0.8391)(30) = 25.17 m

Ejercicio No. 2 Determine el valor del ángulo de inclinación de la compuerta con respecto al nivel de referencia, considerando una profundidad del agua (h) de 2 m y una longitud de la compuerta (L) de 4 m.



Se selecciona la razón trigonométrica que relacione los tres valores que participan en el problema, el ángulo (desconocido), el cateto opuesto (h) y la hipotenusa (L). El seno es dicha razón, quedando como sigue:

$$Sen = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa}$$

h = cateto apuesto al ángulo α
L = hipotenusa

$$Sen \quad \alpha = \frac{h}{L}$$

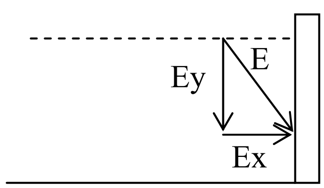
$$Sen \quad \alpha = \frac{2}{4} = 0.5$$

Para determinar el valor del ángulo se obtiene el seno inverso o función inversa del seno (sen^{-1})

Sen^{-1} 0.5 = 30°

α = 30°

Ejercicio No. 3 En una presa se determinó que el empuje hidrostático vertical es de 1.83 ton y el horizontal es de 4 ton. Determine el empuje total que actua sobre la cortina de la presa, considerando que el empuje hidrostático es una magnitud vectorial.



E = empuje hidrostático total
Ey = empuje hidrostático vertical
Ex = empuje hidrostático horizontal

En este caso tenemos la participación únicamente de los lados de un triángulo, no participa ningún ángulo, por lo que, se utiliza el Teorema de Pitágoras para conocer el valor de E.

$$E^2 = (Ex)^2 + (Ey)^2$$

$$E = \sqrt{(Ex)^2 + (Ey)^2}$$

$$E = \sqrt{(4)^2 + (1.8)^2}$$

$$E = \sqrt{16 + 3.35} = \sqrt{19.35}$$

$$E = 4.4 \quad ton$$